TITLE:
Algebra of Observables in Hilbert Space (「Operator algebraとその応用」研究会報告集)

AUTHOR(S):
富田, 稔

CITATION:
富田, 稔. Algebra of Observables in Hilbert Space (「Operator algebraとその応用」研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 104: 82-99

ISSUE DATE:
1970-12

URL:
http://hdl.handle.net/2433/106307

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
104巻 1970年 82-99

Algebra of observables in Hilbert space.

九大理　富田　稔.

§1. 序論

Observable は, Hilbert 空間上の作用素, vector, 共役 vector, 期待値などを包摂した物理学上の概念である。これを数学的に取扱うために, Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の上の任意の作用素, 2個の vector, および scalar からなる組 (A_0, x, y, μ) を $\mathfrak{H}$ の observable と呼び, $\mathfrak{H}$ の observable 全体 $T(\mathfrak{H})$ に適当な $*$-代数としての演算と norm を導入して Banach $*$-代数として取扱うことにする。

そのために Lie 群 G の正定値超関数 μ の表現を考察する。Compact carrier をもち無限回微分可能な G 上の関数全体 $\mathcal{D}(G)$ を G の群環としての位相 $*$-代数であると考えたとき, μ は $\mathcal{D}(G)$ 上の連続な正値線型汎関数である。μ を用いて適当な Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ への $\mathcal{D}(G)$ の vector 表現 λ と作用素表現 π を構成することが出来る。λ は $\mathcal{D}(G)$ から $L^2(\mu)$ の稠密部分空間への連続線型写像であり, π は $\mathcal{D}(G)$ から $L^2(\mu)$ 上のある作用素環への連続な $*$-準同型写像で, 次の条件をみたすものである。

$$\mu(g^*f) = (\lambda(f)|\lambda(g)),$$

$$\pi(f)\lambda(g) = \lambda(fg).$$

この π, λ を用いて $L^2(\mu)$ 上の observable 表現 τ を次のように定義する.

$$\tau(f) = (\pi(f), \lambda(f), \lambda(f^*), \mu(f)).$$

Observable の norm, その間の演算などは, この表現が連續となるように導入される. このようにすれば, 一般に位相 $*$-代数の作用素表現 π と vector 表現 λ の相互関係の研究, あるいは G の正定値超関数と通常の正定値関数の関係の研究, また C^*-代数および von Neumann 代数の上の非有界正値線型汎関数の研究などはすべて Observable の作る $*$-代数の構造の研究に帰着させることが出来る.

§2. 基本概念.

$T(\mathfrak{H})$ の Banach $*$-代数としての演算および norm は次の通りである. $A = (A_0, x, y, \mu)$, $B = (B_0, u, v, \nu)$ とすれば

$$\alpha A = (\alpha A_0, \alpha x, \bar{\alpha} y, \alpha\mu), \quad A+B = (A_0+B_0, x+u, y+v, \mu+\nu),$$

$$AB = (A_0B_0, A_0u, B_0^*y, (y|u)), \quad A^* = (A_0^*, y, x, \bar{\mu}).$$

$$\|A\| = \left(\|A_0\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + |\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

・$\mathfrak{H}$ 上の連続線型作用素全体を $P(\mathfrak{H})$ とする。$P(\mathfrak{H})$ の任意の要素 A を observable $(A, 0, 0, 0)$ と，また $\mathfrak{H}$ の任意の要素 x を observable $(0, x, 0, 0)$ と同一視すれば，$P(\mathfrak{H})$ は $T(\mathfrak{H})$ の閉部分 $*$-代数に，$\mathfrak{H}$ は $T(\mathfrak{H})$ の閉部分空間に，$*$-代数としての演算や作用素と vector の積などをすべて保存して等長同型に embed される。実際

$$(A, 0, 0, 0)(0, x, 0, 0) = (0, Ax, 0, 0).$$

$\mathfrak{H}$ の要素 x に対して，x^* は observable $(0, 0, x, 0)$ をあらわすことになる。$x \longrightarrow x^*$ は $\mathfrak{H}$ と $T(\mathfrak{H})$ のある閉部分空間 $\mathfrak{H}^*$ の間の involution (全射的共役線型等長同型対応) になる。Observable $(0, 0, 0, 1)$ を J であらわし単位期待値という。また observable $A = (A_0, x, y, \mu)$ に対して $A_0 = \pi(A)$, $x = \lambda(A)$, $y = \lambda(A^*)$, $\mu = \mu(A)$ とおけば

$$A = \pi(A) + \lambda(A) + \lambda(A^*)^* + \mu(A) J,$$

$$\|A\|^2 = \|\pi(A)\|^2 + \|\lambda(A)\|^2 + \|\lambda(A^*)\|^2 + |\mu(A)|^2.$$

作用素 A および vector x, y の間の observable としての演算は次の通りである。

$$y^*A = (A^*y)^*, \quad y^*x = (x|y)J,$$
$$xA = Ay^* = xy = x^*y^* = xy^* = 0 .$$

§3. $T(\mathfrak{H})$ の代数的な性質

J の scalar multiply μJ 全体を CJ とする．CJ は $T(\mathfrak{H})$ の center で，任意の observable A と CJ の要素 X に対して $AX = XA = 0$ が成立する．$T(\mathfrak{H})$ の根基は π の核，つまり $\pi(A) = 0$ となる observable A 全体である．$T(\mathfrak{H})$ は環としての単位元をもたないのでこれに単位元を加えた Banach $*$-代数 $T_1(\mathfrak{H})$ を考え，その要素を拡大 observable という．$T_1(\mathfrak{H})$ の単位 1 と $\mathfrak{H}$ の単位作用素 I は区別しなければならない．作用素 A の作用素としての spectrum を $S_\pi(A)$ であらわす．

Observable A の spectrum $S(A)$ を，$T_1(\mathfrak{H})$ の中での A の spectrum であると定義すれば

$$S(A) = S_\pi(\pi(A)) \cup \{0\}$$

が成立する．$\mu(A) = 0$ となる observable A を preobservable と呼び，$\mathfrak{H}$ の preobservable 全体を $\mathfrak{P}(\mathfrak{H})$ とする．また任意の observable A に対して $\rho(A) = A - \mu(A)J$ と

おき，$R(\mathfrak{H})$の中に新しい積を$P(AB)$で定義する．CJを$T(\mathfrak{H})$の ideal と見たとき，$P(A) \longleftrightarrow A-CJ$ は$R(\mathfrak{H})$と商環 $T(\mathfrak{H})-CJ$ の間の等長同型対応となり，$R(\mathfrak{H})$は Banach $*$-代数である．

・Observable A は$\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ の2次式(quadric)

$$A(x,y) = (\pi(A)x|y) + (\lambda(A)|y) + (x|\lambda(A^*)) + \mu(A)$$

をあらわしている．この表現は忠実であるから；$\mathfrak{H}$の幾何学的変換は，$T(\mathfrak{H})$の変換をひきおこす．いま$\mathfrak{H}$の unitary 作用素をU，$\mathfrak{H}$の要素をg，正数をαとして，$T(\mathfrak{H})$の変換 T_U, T_g, T_α を次のように定義する．

$$T_U A(Ux, Uy) = A(x,y),$$
$$T_g(A)(x-g, y-g) = A(x,y),$$
$$T_\alpha(A)(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 A(x,y).$$

これを計算すれば次の形になる．

$$T_U A = U\pi(A)U^* + U\lambda(A) + (U\lambda(A^*))^* + \mu(A)J.$$

$$T_g(A) = \pi(A) + (\lambda(A)+Ag) + (\lambda(A^*)+A^*g)^* + (\mu(A) + (\lambda(A)|A^*g) + (Ag|\lambda(A^*)) + (Ag|g))J,$$

$$T_\alpha A = \pi(A) + \alpha\lambda(A) + (\alpha\lambda(A^*))^* + \alpha^2\mu(A)J.$$

$T(\mathfrak{H})$の非何学的変換はこの3種の変換の積として定義する、

T_U, T_g, T_α を $T(\mathfrak{H})$ の基本自己同型写像と呼ぶ。これは $T(\mathfrak{H})$ の$*$-自己同型対応をひきおこし，逆に $T(\mathfrak{H})$ の任意の$*$-自己同型対応は上の意味の非何学的変換に限られる。

T_U, T_g, T_α は $T(\mathfrak{H})$ の正則な要素

$$S_U = 1 - I + U, \quad S_g = 1 - g + g^* - 2^{-1}\|g\|^2 J,$$

$$S_\alpha = \alpha(1-I) + I$$

を用いて次のようにあらわすことが出来る。

$$T_U A = S_U A S_U^*, \quad T_g A = S_g A S_g^*,$$

$$T_\alpha A = S_\alpha A S_\alpha^*.$$

まず $S_U^{-1} = S_U^* = S_{U^*}$, $S_g^{-1} = S_g^* = S_{-g}$ が成立することから T_U, T_g は $T(\mathfrak{H})$ の$*$-自己同型であることがわかる。S_α は任意の observable A, B に対して $AS_\alpha B = AB$ をみたしていること，$\alpha \longrightarrow S_\alpha$ が正数のつくる乗法群の同型対応であることから，T_α は $T(\mathfrak{H})$ の$*$-自己同型になる。

$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{H}$ の閉部分空間，E を $\mathfrak{M}$ への射影作用素，A_E で作用素 A の $\mathfrak{M}$ への制限(reduction)をあらわす，

$\mathfrak{M}$ における単位期待値を J_E と書き，$\mathfrak{H}$ の observable A の $\mathfrak{M}$ への制限 (reduction) A_E を次のように定義する．

$$A_E = \pi(A)_E + E\lambda(A) + (E\lambda(A^*))^* + \mu(A) J_E .$$

また $E^\circ = 1 - I + E$ とおけば，

$$E^\circ A E^\circ = E\pi(A)E + E\lambda(A) + (E\lambda(A^*))^* + \mu(A) J.$$

これから $A \to A_E$ は $E^\circ T(\mathfrak{H}) E^\circ$ と $T(\mathfrak{M})$ の同型対応で，$A_E = (E^\circ A E^\circ)_E$ が常に成立することがわかる．

$\mathfrak{H}$ とは別に，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_0$ をとりその単位作用素を I_0，単位期待値を J_0 とする．$\mathfrak{H}$ の observable A と $\mathfrak{H}_0$ の observable B との tensor 積 $A\otimes B$ は次のように定義する．$J\otimes J_0$ を $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0$ の単位期待値として

$$A\otimes B = \pi(A)\otimes\pi(B) + \lambda(A)\otimes\lambda(B) + (\lambda(A^*)\otimes\lambda(B^*))^* + \mu(A)\mu(B)\, J\otimes J_0 .$$

とくに $\mathfrak{H}_0$ が可分無限次元の場合を考え，$\mathfrak{H}_0$ の要素 e で $\|e\| = 1$ をみたすものをとり $G = I_0 + e + e^* + J_0$ とおく．$\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0$ は $\mathfrak{H}$ の可算直和とみなすことが出来て，$A \longrightarrow A\otimes G$ は $T(\mathfrak{H})$ を $T(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0)$ の部分 *-代数の上にうつす等長同型写像である．

以上のような $T(\mathfrak{F})$ の幾何学的変換，制限，あるいは tensor 積 $A \to A \otimes G$ などは π の核を π の核に，また ρ の核を ρ の核にうつしているので，同時に $P(\mathfrak{F})$，$R(\mathfrak{F})$ の変換，制限，tensor 積を引きおこしている．

$T(\mathfrak{F})$ の閉部分 $*$-代数を observable algebra，$R(\mathfrak{F})$ の閉部分 $*$-代数を preobservable algebra と呼ぶ．Observable algebra $\mathfrak{A}$ は J を要素として含まない μ-有限な algebra と，J を要素として含んでいる μ-無限な algebra とに分れる．$\mathfrak{A}$ は C^*-代数と $*$-同型になるときに限り，μ-有限となる．$\mathfrak{A}$ が有限であれば，$\mathfrak{B} = \pi(\mathfrak{A})$ は C^*-代数で，適当な $\mathfrak{F}$ の要素 g をとれば $\mathfrak{A} = T_g(\mathfrak{B})$ となる．ただし作用素 A に対しては $T_g A$ は次の形である．

$$T_g A = A + Ag + (A^* g)^* + (Ag|g)J.$$

$\mathfrak{A}$ が無限の場合は $\mathfrak{A} = \rho(\mathfrak{A}) + CJ$ とかける．$\rho(\mathfrak{A})$ は preobservable algebra であり，$\mathfrak{A}$ の構造は $\rho(\mathfrak{A})$ によって完全に定まる．

$T(\mathfrak{F})$ の $*$-不変部分集合 $\mathfrak{A}$ に対して3種の commutant algebra $\mathfrak{A}^\pi$, $\mathfrak{A}^\rho$, $\mathfrak{A}^\tau$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{A}^\pi = (X : \pi(AX - XA) = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}_\rho = (X : \rho(AX - XA) = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}^\tau = (X : AX = XA \text{ for } A \in \mathfrak{A}).$$

また $\mathfrak{A}$ の achievement $\mathfrak{A}^T$ を次のように定義する.

$$\mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}^{\pi\pi} \cap \mathfrak{A}^{\rho\rho} \cap \mathfrak{A}^{\tau\tau}.$$

$\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A}^\pi$, $\mathfrak{A}^\rho$, $\mathfrak{A}^\tau$, $\mathfrak{A}^T$ は observable algebra である。CJ は $T(\mathfrak{H})$ の center であるからこれは皆 $\mathcal{A}$-無限である。一般に次の関係が成立する。

$$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}^{TT}.$$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^T$ をみたす observable algebra $\mathfrak{A}$ は achieved であるという。T を $T(\mathfrak{H})$ の $*$-自己同型とすれば任意の $T(\mathfrak{H})$ の $*$-不変集合 $\mathfrak{A}$ に対して次式が成立する。

$$(T\mathfrak{A})^\pi = T(\mathfrak{A}^\pi), \quad (T\mathfrak{A})^\rho = T(\mathfrak{A}^\rho), \quad (T\mathfrak{A})^\rho = T(\mathfrak{A}^\rho),$$

$$(T\mathfrak{A})^T = T(\mathfrak{A}^T), \quad (\mathfrak{A} \otimes G)^T = \mathfrak{A}^T \otimes G.$$

また $\mathfrak{A}$ を observable algebra, E を $\mathfrak{H}$ の射影作用素とし, $\mathfrak{A}_E = (A_E : A \in \mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ の E 空間への制限とする.

作用素環の制限の理論の拡張として次の関係が成立する。

$$(\mathfrak{a}_E)^{\pi} = (\mathfrak{a}^{\pi})_E,\quad (\mathfrak{a}_E)^{\rho} = (\mathfrak{a}^{\rho})_E,\quad (\mathfrak{a}_E)^{\tau} = (\mathfrak{a}^{\tau})_E,$$

$$(\mathfrak{a}_E)^{T} = (\mathfrak{a}^{T})_E.$$

§4.　$T(\mathfrak{S})$ の位相的性質.

$T(\mathfrak{S})$ はその部分空間の積空間として次のようにあらわされる。

$$T(\mathfrak{S}) = R(\mathfrak{S}) + CJ,\quad R(\mathfrak{S}) = P(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S} + \mathfrak{S}^*.$$

$N(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}^*$ とおけば, $N(\mathfrak{S})$ は次の内積をもつ Hilbert 空間である。

$$(X|Y) = (\lambda(X)|\lambda(Y)) + (\lambda(Y^*)|\lambda(X^*))$$
$$= \mu(Y^*X + XY^*).$$

$N(\mathfrak{S}) + CJ$ は π の核つまり $T(\mathfrak{S})$ の根基であり, 次の内積をもつ Hilbert 空間である。

$$(X|Y) = (\nu(X)|\nu(Y)) + \mu(X)\overline{\mu(Y)},$$

ただし, ν は $\nu(A) = \lambda(A) + \lambda(A^*)^*$ によって定義される $T(\mathfrak{S})$ から $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^*$ 上への半線型写像である。

$\pi(X)$ が nuclear 作用素である observable X を nuclear observable という．$T_*(\mathfrak{H})$ で nuclear observable 全体を，$R_*(\mathfrak{H})$ で nuclear preobservable 全体を，$P_*(\mathfrak{H})$ で nuclear 作用素全体をあらわすことにする．周知の通り，$P_*(\mathfrak{H})$ は trace norm $\|X\|_1$ に関して Banach $*$-algebra であり，$P(\mathfrak{H})$ は $P_*(\mathfrak{H})$ の dual space になっている．nuclear 作用素 A の trace を $T(A)$ とすれば $P(\mathfrak{H})\times P_*(\mathfrak{H})$ の間の基本型式として $T(X^*A)$ $(A\in P(\mathfrak{H}),\ X\in P_*(\mathfrak{H}))$ をとることが出来る．この基本型式を次のような $T(\mathfrak{H})\times T_*(\mathfrak{H})$ 上の基本型式に拡張する．$T(\mathfrak{H})$ の要素 A と $T_*(\mathfrak{H})$ の要素 X に対し，

$$(A|X) = T(\pi(X^*A)) + ((1-\pi)A\,|\,(1-\pi)X).$$

Nuclear observable X の trace norm $\|X\|_1$ を次のように定義する．

$$\|X\|_1 = \left(\|\pi(X)\|_1^2 + \|(1-\pi)X\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$T_*(\mathfrak{H})$ は $P_*(\mathfrak{H})$ と Hilbert 空間 $N(\mathfrak{H})+CJ$ の積空間であるから次の定理が得られる．

定理．$T_*(\mathfrak{H})$ および $R_*(\mathfrak{H})$ は trace norm により Banach $*$-algebra であり，$T(\mathfrak{H})$ は $T_*(\mathfrak{H})$ の共役空間，$R(\mathfrak{H})$ は $R_*(\mathfrak{H})$ の共役空間である．

$T_*(\mathfrak{H})$ の共役空間としての $T(\mathfrak{H})$ の*-弱位相を $T(\mathfrak{H})$ の*-弱位相という。任意の $T(\mathfrak{H})$ の要素 A と $T_*(\mathfrak{H})$ の要素 X に対して次の式をみたす $T_*(\mathfrak{H})$ の要素 L_A^*X, R_A^*X がとれる。

$$(AB\,|\,X) = (B\,|\,L_A^*X),$$
$$(BA\,|\,X) = (B\,|\,R_A^*X).$$

このことから $B \to AB$, $B \to BA$ は $T(\mathfrak{H})$ 上で*-弱連続である。また π, ρ も*-弱連続であるから次の定理が得られる。

定理、$T(\mathfrak{H})$ の*-不変集合 $\mathfrak{A}$ に対して、$\mathfrak{A}^\pi, \mathfrak{A}^\rho, \mathfrak{A}^\tau, \mathfrak{A}^T$ などは*-弱閉である。

次に $T(\mathfrak{H})$ の*-強位相を定義する。$\mathfrak{H}$ の点列 $\{x_m\}$ の norm $\|x\| = (\sum \|x_m\|^2)^{\frac{1}{2}}$ が有限なものをとり，$T(\mathfrak{H})$ の pseudonorm t_x を次のように定める。

$$t_x(A) = \Big(\sum (\|Ax_m\|^2 + \|A^*x_m\|^2)^{\frac{1}{2}} + \|\nu(A)\|^2 + |\mu(A) + \sum (Ax_m|x_m)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

ただし $Ax_m = \pi(A)x_m$ が成立していることに注意する。

$\mathfrak{H}_0$ を可算無限次元 Hilbert 空間として，$T(\mathfrak{H})$ から

$T(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0)$ の中への等長同型写像 $A\longrightarrow A\otimes G$ を考える，ただし $G=I_0+e+e^*+J_0$ である．$\mathfrak{H}$ の正規直交基 $\{e_n: n=0,1,2\cdots\}$ で $e_0=e$ をみたすものをとる．norm が有限な $\mathfrak{H}$ の点列 $x=\{x_n\}$ を $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0$ の要素 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\otimes e_n$ と同一視すれば，pseudonorm t_x は次の形になる．

$$t_x(A)=\|(1-\pi)(T_x(A\otimes G))\|.$$

Pseudonorm の系 $\{t_x\}$ を基として出来る $T(\mathfrak{H})$ の局所凸位相を $T(\mathfrak{H})$ の *-強位相と呼ぶ．*-強位相は一様位相より弱いが *-弱位相より強い．また次の定理が成立する．

定理．$T_*(\mathfrak{H})$ は *-強連続な $T(\mathfrak{H})$ 上の線型汎関数全体の空間である．$T(\mathfrak{H})$ 中の凸集合 X の *-強閉包と *-弱閉包は常に一致する．

作用素環に対する von Neumann および Kaplansky 稠密定理の一般化が次の2定理として証明される．

定理．$\mathfrak{H}$ の observable algebra $\mathfrak{A}$ の単位球は，$\mathfrak{A}$ の *-強閉包の単位球の中で *-強稠密である．

定理．$\mathfrak{A}$ が無限な observable algebra であれば，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ の achievement $\mathfrak{A}^T$ の中で *-強稠密である．
上の2定理のうち最初の Kaplansky 型定理は，例えば作用素

理の場合の Dixmier の証明を修正して証明することも出来る。が、むしろ observable algebra における duality theory の立場から取扱うことにする。Observable algebra $\mathfrak{A}$ の $T_*(\mathfrak{H})$ での anihilator を $\mathfrak{A}^{\perp}$, 第2 anihilator を $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ とすれば $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ は $\mathfrak{A}$ の *-弱閉包(=*-強閉包)である。いま任意の observable U と $\mathfrak{H}$ の点列 $x=\{x_n\}$ で $\|x\|\leqq 1$ をみたすものをとって nuclear 作用素 W_{xx} および nuclear observable U_x を次のように定義する。

$$W_{xx}y=\sum(y|x_n)x_n,\quad U_x=\pi(U)W_{xx}+(1-\pi)U.$$

明らかに $\|U_x\|_1\leqq\|U\|$ となるが、次の polarization theorem が成立する。

定理. $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{H}$ の observable algebra X を $T_*(\mathfrak{H})$ の要素とし, $\|X\|_{\mathfrak{A}}$ で X の $\mathfrak{A}$ における norm をあらわすとする。このとき $\|U\|=\|X_{\mathfrak{A}}\|$ をみたす $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ の要素 U と $\|x\|=1$ をみたす $\mathfrak{H}$ の点列 $x=\{x_n\}$ で $X-U_x$ が $\mathfrak{A}^{\perp}$ に属するものがある。

この定理の証明は，先ず $\mathfrak{A}$ の連続線型汎関数について類似の定理を証明しておき，それが*-強連続な場合に定理3.6の形になることを示せばよい。この定理は，$\mathfrak{A}$ 上の*-強連続線型汎関数全体 $\mathfrak{A}_*$ は $\mathfrak{A}$ の共役空間 $\mathfrak{A}^*$ の閉線型部

分空間であり，しかも商空間 $T_*(\mathfrak{S})-\mathfrak{A}^\perp$ と等長同型になることを示している．$\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ は $T_*(\mathfrak{S})-\mathfrak{A}^\perp$ の共役空間であるから，$\mathfrak{A}$ の単位球は $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ の単位球で *-弱稠密（従って *-強稠）になる．

von Neumann 型稠密定理も本質的には duality theory の問題である． *-強位相を定義する pseudonorm t_x は

$$t_x(A)=\|(1-\pi)T_x(A\otimes G)\|$$

とあらわせるし，他方 observable algebra $\mathfrak{A}$ に対しては

$$(T_x(\mathfrak{A}\otimes G))^\tau = T_x(\mathfrak{A}^\tau\otimes G)$$

が成立するので，無限 observable algebra $\mathfrak{A}$ に対して $(1-\pi)\mathfrak{A}$ が $(1-\pi)\mathfrak{A}^\tau$ で稠密なことを示せばよい，$\mathfrak{A}=P(\mathfrak{A})+CJ$，$\mathfrak{A}^\tau=P(\mathfrak{A}^\tau)+CJ$ であるから，結局 $\nu(\mathfrak{A})$ が $\nu(\mathfrak{A}^\tau)$ で稠密なことを示せばよい．以下の議論は [1] で試みられた議論と本質的に同一の証明を行えばよい．しかし議論には unbounded な作用素，あるいは observable の性質を使う必要がある．

§4. Observable algebra の構造.

Observable の集合 $\mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{M}$ を含む最小の閉

凸集合を $Co(X)$，で，$\mathfrak{M}$ を含む最小の閉線型空間を $[\mathfrak{M}]$ であらわす．Preobservable algebra $\mathfrak{A}$ に対して，$[\mathfrak{A}\xi]$ への射影作用素を P，$\pi(A)=0$ をみたす $\mathfrak{A}$ の要素全体を $N(\mathfrak{A})$，$[\lambda(N(\mathfrak{A}))]$ への射影作用素を N とし，

$$F=P(I-N),\quad S=PN,\quad Z=(I-P)N,\quad V=(I-P)(I-N)$$

とおけば，F, S, Z, V は $F+S+Z+V=I$ をみたす互に直交する射影作用素である．これらを用いて次のような $\mathfrak{A}$ の部分集合および部分代数を定義する．

$$\mathfrak{A}_F=(\pi(A)+F\lambda(A)+(F\lambda(A^*))^* : A\in\mathfrak{A}),$$

$$N(S)=(x+y^* : x, y\in \text{Range of } S),$$

$$\mathfrak{A}_Z=(Z\lambda(A)+(Z\lambda(A^*))^* : A\in\mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}_P=(\pi(A)+P\lambda(A)+(P\lambda(A^*))^* : A\in\mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}^H=(A\in\mathfrak{A} : A=A^*),$$

$$\mathfrak{A}^+=Co(A^*A : A\in\mathfrak{A}).$$

このとき次の定理が成立する．

定理．(a)．$N(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の radical で，$\mathfrak{A}_F$ は商環 $\mathfrak{A}-N(\mathfrak{A})$ に等長同型な observable subalgebra

である。(b)、$\mathfrak{A}_Z$ は $X\mathfrak{A} = \mathfrak{A}X = 0$ となる $\mathfrak{A}$ の要素 X 全体の作る observable algebra に等しい。(c)、$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}_P$ と $\mathfrak{A}_Z$ の直和である。(d)、$\mathfrak{A}_P = [\mathfrak{A}^+] = [\mathfrak{A}^2]$ が成立する。(e)、$N(S)$ は $\mathfrak{A}_P$ の radical で、$\mathfrak{A}_P = \mathfrak{A}_F + N(S)$ が成立する。(f)、$N(S)^H = \mathfrak{A}^+ \cap N(\mathfrak{A})$ であり、$\mathfrak{A}^+ = (A \in \mathfrak{A}_P^H : \pi(A) \geqq 0)$ となる。

上の定理は一般の ~~observ~~ preobservable algebra が semi-simple な observable algebra $\mathfrak{A}_F$ からどのように構成されるかを決定するものである。これと von Neumann, Kaplansky 型定理の応用によって無限 observable algebra $\mathfrak{A}$ とその commutant $\mathfrak{A}^\rho$ の関係が次のように述べられる。$\mathfrak{A}$ を probservable algebra として $P(\mathfrak{A}^\rho)$ に対して定義される射影をそれぞれ、P_ρ, N_ρ, F_ρ, S_ρ, Z_ρ, V_ρ とおけば、

定理、任意の preobservable algebra $\mathfrak{A}$ に対して、次の関係式が成立する。

$$P_\rho = I - N,\quad N_\rho = I - P,$$

$$F = F_\rho,\quad S = V_\rho,\quad Z = Z_\rho,\quad V = S_\rho .$$

Preobservable algebra $\mathfrak{A}$ では $\mathfrak{A}$ が semi-simple であること（つまり $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F$ ）と $\mathfrak{A}$ が非縮退（つまり $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P = [\mathfrak{A}^2] = [\mathfrak{A}^+]$ ）とは同値であり. Lie 群 G 上の正定値超関数 μ について, 以上の構造論の意味するところを説明すれば次の通りである. まず $L^2(\mu)$ 上の observable 表現 で $\mathcal{D}(G)$ を表現して出来た observable algebra を $\mathfrak{L}$ とする. $L^2(\mu)$ 上で π は非縮退なので $\mathfrak{L}$ は非縮退である. ~~従って~~ これは $\mathfrak{A} = \mathcal{D}(G)$ として $[\mathfrak{A}^2]$ が $\mathfrak{A}$ で稠密であることに対応している. しかし, $\mathfrak{L}$ は必しも semi-simple でない. $\mathfrak{L}$ が semi-simple なことと次の条件は同値である.

(1). $\pi(a) \rightarrow \lambda(a)$ は closable, すなわち $\pi(a_n) \rightarrow 0$ $\lambda(a_n) \rightarrow x$ ならば $x = 0$.

(2). $$\mu(a^*a) = \sup_{p \in \mathcal{F}(\mu)} p(a^*a)$$

が成立する. ただし, $\mathcal{F}(\mu)$ は $\mu \geq p \geq 0$ をみたす正定値関数全体である.

[1]. Standard forms of von Neumann algebras
M. Tomita, 1967. 東北大学, Functional analysis symposium. 講究録.